# Prednáška 4

## 4.1. Priestory so skalárnym súčinom

Pomocou skalárneho súčinu sa na priestore dajú rozumne definovať geometrické pojmy uhol a vzdialenosť, čím na priestore vzniká dodatočná geometrická štruktúra. Pomenovanie prehilbertovský priestor poukazuje na skutočnosť, že ľubovolné jeho zúplnenie je Hilbertov priestor. Teória Hilbertových priestorov sa používa v kvantovej mechanike, kde sa stavy fyzikálneho systému popisujú pomocou prvkov nejakého Hilbertovho priestoru. Často sa predpokladá, že daný Hilbertov priestor je navyše reprezentácia nejakej grupy (zvyčajne grupy transformácií Lorentzových transformácií). S termínom Hilbertov priestor sa stretávame aj pri jadrovej transformácii pri metóde "support vector machines" populárnej v strojovom učení.

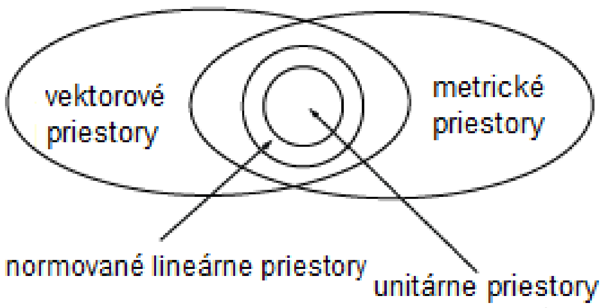
**Definícia 4.1.1.**

Nech $X$ je vektorový priestor. Skalárnu funkciu $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ s nasledujúcimi vlastnosťami

- linearita: $\langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}\rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \beta\langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle$
- symetria: $\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$
- pozitívna definitnosť: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0$ a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ nazývame skalárny súčin.

Skalárny súčin je vlastne bilineárna forma, ktorá prirodzeným spôsobom indukuje kvadratickú formu. Skalárny súčin je potom akákoľvek bilineárna forma ktorá indukuje kladne definitnú kvadratickú formu.




Obr. 4.1: Diagram "matematických" priestorov.

**Definícia 4.1.2.**

Lineárny priestor so skalárnym súčinom nazývame aj unitárny priestor (prehilbertov priestor). Úplný unitárny priestor nazývame Hilbertov ($H$ priestor).

**Poznámka 4.1.3.**

V unitárnom priestore je možné definovať aj uhol medzi prvkami $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ako $\arccos \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|}$.

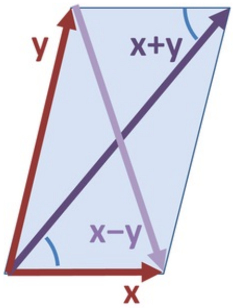
**Príklad 4.1.4.**

- Všeobecná forma skalárneho súčinu na $\mathbb{C}^n$ je (známa ako Hermitovska forma) daná

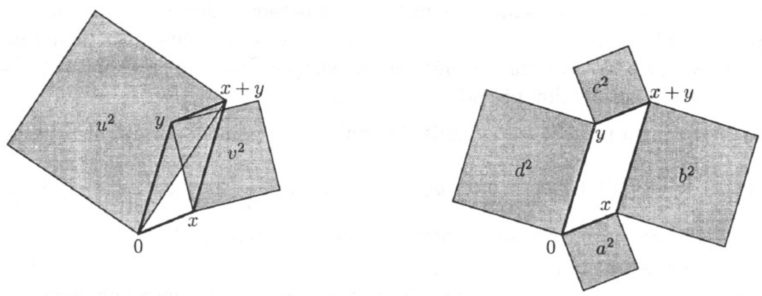
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{y},$$

  kde $\mathbf{M}$ je ľubovoľná Hermitovská ($m_{ij} = \overline{m_{ji}}$) pozitívne-definitná matica, a $\mathbf{x}^*$ konjugovaná transpozícia $\mathbf{x}$.
- Priestory $l^2$, $\mathcal{L}^2(\Omega)$ sú unitárne.
- Na priestore reálnych matíc sa dá zaviesť skalárny súčin pomocou $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle := \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$.

Nasledujúcu nerovnosť už poznáme formulovanú pre rady, či integrály. Teraz si ju uvedieme pre skalárne súčiny.




(a) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$




(b) $u^2 + v^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Obr. 4.2: Rovnobežníkove pravidlo.

**Veta 4.1.5** (Cauchyova-Schwartzova nerovnosť)**.**

Nech $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je skalárny súčin na vektorovom priestore $X$.

(i) Pre $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$ platí $|\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| \leq \sqrt{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}$.

(ii) Funkcia $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}$ je norma na $X$.

**Poznámka 4.1.6.**

Predchádzajúca nerovnosť je zrejme špeciálnym prípadom Hölderovej nerovnosti ($p = q = 2$).
Zrejme každý unitárny priestor je NLP a teda metrický priestor.

Uvedieme si geometrické vlastnosti skalárneho súčinu, ktoré sa vlastne prenášajú s euklidovských priestorov.

**Veta 4.1.7** (Polarizácia a rovnobežníkove pravidlo)**.**

Majme priestor $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Potom platí

1. $4\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + \mathrm{i}\,\|\mathbf{x}+\mathrm{i}\mathbf{y}\|^2 - \mathrm{i}\,\|\mathbf{x}-\mathrm{i}\mathbf{y}\|^2$
2. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$

**Poznámka 4.1.8.**

Zrejme $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\Re\mathfrak{e}\,(\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle) + \|\mathbf{y}\|^2$ (polarizácia je vlastne zovšeobecnenie kosínusovej vety).
V reálnom prípade môžeme skalárny súčin vyjadriť aj takto:

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\,,)$$

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2).$$

V komplexnom prípade zasa aj takto:

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \mathrm{i}\,\|\mathbf{x}+\mathrm{i}\mathbf{y}\|^2 - (1+\mathrm{i})(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$

Rovnako ako v geometrii roviny a trojrozmerného priestoru skalárny súčin umožňuje definovať situáciu, kedy dva prvky sú na seba kolmé. To nám umožňuje zaviesť aj ďalšie dôležité pojmy.

**Definícia 4.1.9.**

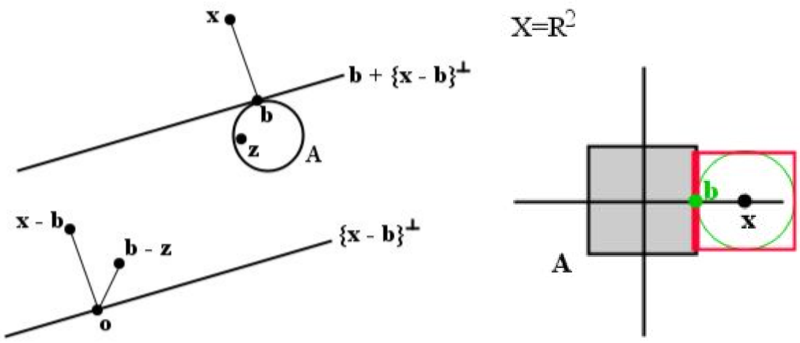
Dva prvky $\mathbf{x},\mathbf{y}$ lineárneho priestoru $X$ so skalárnym súčinom nazývame kolmé (ortogonálne), ak $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$, zapisujeme to $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$. Hovoríme, že prvok $\mathbf{y}\in X$ je ortogonálny na $A\subseteq X$, ak $\mathbf{x}\perp\mathbf{a}$ pre ľubovoľné $\mathbf{a}\in A$. Hovoríme, že $A\subseteq X$ je ortogonálna, ak pre ľubovoľné $\mathbf{a}\in A$ platí $\mathbf{a}\perp A\setminus\{\mathbf{a}\}$. Podmnožiny $A,B\subseteq X$ nazývame navzájom ortogonálne, ak pre ľubovoľné $\mathbf{a}\in A$ platí $\mathbf{a}\perp B$.

**Definícia 4.1.10.**

Nech ľubovoľné $A\subseteq X$ je neprázdna množina. Potom množinu $A^\perp := \{\mathbf{x}\in X : \langle\mathbf{x},\mathbf{a}\rangle = 0\ \ \forall\ \ \mathbf{a}\in A\}$ nazývame ortogonálny doplnok $A$ v $X$.

**Poznámka 4.1.11.**

Samozrejme je $A^\perp$ lineárny podpriestor $H$. Je dokonca vždy uzavretý, čo plynie priamo zo Schwartzovej nerovnosti (a teda spojitosti skalárneho súčinu).




(a)

(b) Jednoznačnosť vs. nejednoznačnosť - stačí uvažovať normy $\|\cdot\|_2$ (zelenou) a $\|\cdot\|_\infty$ (červenou) v $\mathbb{R}^2$.

Obr. 4.3: Najbližší prvok v $H$ a v NLP $X$ v prípade konvexných uzavretých množín.

Ďalšia známa geometrická vlastnosť, ktorá je však zovšeobecnená a to dvoma smermi.

**Veta 4.1.12** (Pytagorova veta)**.**

Majme $H$ priestor. Ak $\mathbf{x}^i \in H, i = 1, \ldots, n$ sú ortogonálne, potom platí

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}^k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{x}^k\|^2 .$$

Všimnime si, že rovnobežníkove pravidlo nebsahuje skalárny súčin, ale iba normy. Platí však iba v priestoroch so skalárnym súčinom.

**Veta 4.1.13** (Charakterizácia H priestoru - von Neumann)**.**

Banachov priestor $(X, \|\cdot\|)$ je Hilbertov priestor práve vtedy, keď platí rovnobežníkove pravidlo.

Nasledujúca veta nám dáva možnosť geometricky charakterizovať najbližší prvok uzavretých podpriestorov a konvexných množín v $H$ priestoroch. Uzavretosť nie je postačujúca, ak hovoríme o LNP priestore $X$ (poskúste sa nájsť kontrapríklad pre pre dvojicu priestorov $c, c_0$).

**Veta 4.1.14** (O existencii najbližšieho prvku)**.**

Nech $H$ je Hilbertov priestor a $Y \subseteq H$. Potom platí:

1. Pre ľubovoľnú dvojicu $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \in H \times Y$ je $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in Y\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{b} \in Y^{\perp}$.
2. Ak $Y$ je uzavretý podpriestor, potom pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in H$ existuje práve jedno $\mathbf{b} \in Y : \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in y\}$.
3. Ak $\emptyset \neq A \subseteq H$ je konvexná a uzavretá podmnožina, potom pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in H$ existuje práve jedno $\mathbf{b} \in A : \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| : \mathbf{a} \in A\}$.
4. Ak $Y \subseteq H$ je úplný podpriestor, tak $Y^{\perp\perp} = Y$.

**Definícia 4.1.15.**

Najbližší prvok $\mathbf{b} \in Y$ z predchádzajúcej vety nazývame ortogonálna projekcia prvku $\mathbf{x} \in H$ na $Y$. Operátor $P_Y : H \to H$ definovaný ako $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sa nazýva ortogonálna projekcia $H$ na $Y$. $P_Y$ je teda také zobrazenie, že pre ľubovoľné $\mathbf{x} \in H$ je $\|\mathbf{x} - P_Y\mathbf{x}\| = \mathrm{dist}(\mathbf{x}, Y)$.

**Poznámka 4.1.16.**

Zobrazenie

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je klasická kolmá projekcia.
Existujú aj neortogonálne projekcie. Napríklad pre $\alpha \neq 0$ je

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

taká projekcia.
Projekcia môže byť aj nelineárne zobrazenie, nech $X$ je LNP:

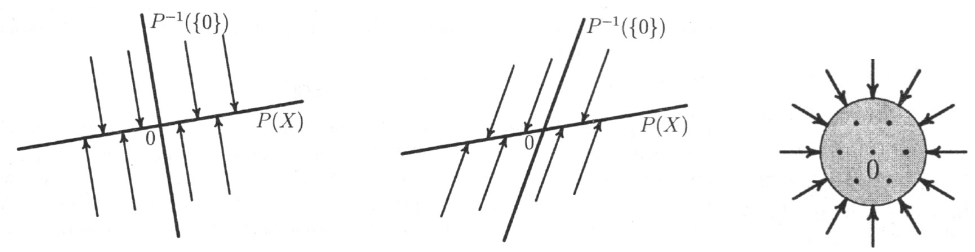
$$P : X \to \overline{B}(0,1) : \quad P(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}, & \text{ak} \quad ||\mathbf{x}|| > 1, \\ \mathbf{x}, & \text{ak} \quad ||\mathbf{x}|| \leq 1. \end{cases}$$

**Definícia 4.1.17.**

Nech $M, N$ sú podpriestory LNP $X$, potom ich algebraický súčet $M \oplus N$ definujeme takto: $M \cap N = \emptyset$ a $X = M + N := \{m + n : \ m \in M, n \in N\}$. Takže každý prvok $\mathbf{x} \in X$ vieme zapísať jednoznačne ako súčet $x_M + x_N$, kde $x_M \in M$ a $x_N \in N$.

**Príklad 4.1.18.**

Zrejme $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ je súčtom $x$-ovej $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ a $y$-ovej $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ osi.




(a) Ortogonálna a neortogonálna lineárna projekcia. (b) Nelineárna projekcia.

Obr. 4.4: Typy projekcií z poznámky 4.1.16.

**Dôsledok 4.1.19.**

Nech $H$ je Hilbertov priestor a $Y$ je jeho uzavretý podpriestor, potom $H = Y \oplus Y^{\perp}$ a projekcie $P_Y, P_{Y^{\perp}}$ sú spojité. (zrejme, ak $Y \neq H$, tak $Y^{\perp} \neq \emptyset$).

**Veta 4.1.20** (Ortogonálne projekcie na konečnorozmerné podpriestory a ich doplnky).

Nech $H$ je Hilbertov priestor a $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ sú LN.

1. Ak $G = \langle\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}\rangle$, potom pre ľubovoľný prvok $\mathbf{y} \in H$ je
$$P_G(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\Gamma_i}}{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)} \mathbf{x}_i,$$
kde $\Gamma_i$ vznikne z $\Gamma$ (gramián) nahradením $i$-teho stĺpca stĺpcom $(\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}\rangle, \dots, \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\rangle)^T$. Navyše pre $\mathbf{x}_0 \in H$ je $\operatorname{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0 + G) = \sqrt{\frac{\Gamma(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)}{\Gamma(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)}}$.
2. Ak $L = \{\mathbf{y} \in H : \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}\rangle = 0,\ i = 1, \dots, n\}$, potom pre ľubovoľný prvok $\mathbf{y} \in H$ je
$$P_L(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - P_G(\mathbf{y})$$
3. Ak $V = \{\mathbf{y} \in H : \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}\rangle = c_i,\ c_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \dots, n\}$, potom pre ľubovoľný prvok $\mathbf{y} \in H$ je
$$P_L(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - P_G(\mathbf{y}),$$
pričom $\Gamma_i$ vznikne z $\Gamma$ (gramián) nahradením $i$-teho stĺpca stĺpcom $(\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}\rangle - \overline{c_1}, \dots, \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\rangle - \overline{c_n})^T$.

Je dobré si uvedomiť, že v predchádzajúcej vete je vo všeobecnosti v bode 1. množina $G$ konečnorozmerná a v bodoch 2., 3. je konečnorozmerný zasa doplnok množín $L, V$.

**Poznámka 4.1.21.**

Majme $H$ priestor. Dá sa ukázať, že pre neprázdny podpriestor $G \subseteq H$ a každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in H$ je

$$s := \sup_{0 \neq g \in G} \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{g} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{g}\|} \in [0, 1],$$

a naviac, že existuje jediné $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ : $\cos \alpha = s$. Hodnotu $\alpha$ nazývame uhol medzi prvkom $\mathbf{x}$ a množinou $G$, označujeme ho $\angle(\mathbf{x}, G)$ (v reálnom prípade zrejme modulus z čitateľa možno odstrániť).
Ak je navyše podpriestor $G$ uzavretý, potom platí $s = \frac{\|P_G(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

S pojmom Hilbertovho priestoru úzko súvisí pojem ortonormálna báza. Našim cieľom je vyjadrenie každého prvku priestoru $H$ v tvare spočítateľnej kombinácie prvkov nejakej ortogonálnej sústavy. Ukazuje sa, že v prípade neseparabilného priestoru je taká sústava nespočítateľná.

**Definícia 4.1.22.**

Ľubovoľnú podmnožinu $B$ priestoru $H$ nazveme ortogonálna sústava, ak každé jej dva rôzne prvky sú kolmé. Je to teda taký systém $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, že platí $\left\langle x_i, x_j \right\rangle = 0, i \neq j$ $\left(\left\langle x_i, x_j \right\rangle = \delta_{ij}\right)$ (naviac predpokladáme, že sú všetky nenulové). Ortogonálnu sústavu $B$ nazveme úplnou, ak sa k nej už nedá pridať žiadny nenulový prvok z $H$, tj. pre každé $\mathbf{x}$ platí : ak $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0 \ \forall \ \mathbf{b} \in B$, potom $\mathbf{x} = 0$.

**Poznámka 4.1.23.**

Zrejme z každej ortogonálnej postupnosti vieme ľahko urobiť ortonormálnu. Ak $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ortogonálny systém, potom $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, n \in \mathbb{N}$ je ortonormálny.

**Príklad 4.1.24.**

- Systém

$$\left\{\frac{\mathrm{e}^{\frac{i2\pi nx}{l}}}{\sqrt{l}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \ l>0$$

je ortonormálny v komplexnom priestore $\mathcal{L}^2(a,a+l),\ a>0$.

- Systém

$$\left\{1, \cos\frac{2\pi}{l}nx, \sin\frac{2\pi}{l}nx\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \ l>0$$

je ortogonálny v reálnom aj komplexnom priestore $\mathcal{L}^2(a,a+l),\ a>0$.

Nasledujúca veta je veľmi dôležitá. Jej dôkaz je z časti vlastne známa metóda ortogonalizácie: Gramov-Schmidtov ortogonalizačný proces. V podstate úplnosť systému v $H$ priestore blízko súvisí s hustotou danej množiny a teda separabilitou priestoru, lebo platí, že pre každý prvok $\mathbf{x}\in H$ a pre každé $\varepsilon>0$ existuje lineárna kombinácia $\mathbf{l} := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : \|\mathbf{l}-\mathbf{x}\| < \varepsilon$ (taký systém sa volá uzavretý - v neúplných priestoroch to nie je ekvivalentný pojem, tj. úplnosť systému neimplikuje uzavretosť).

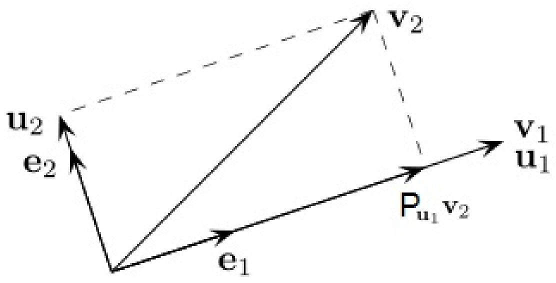
**Veta 4.1.25** (O existencii bázy)**.**

Majme $H$ priestor, potom platí

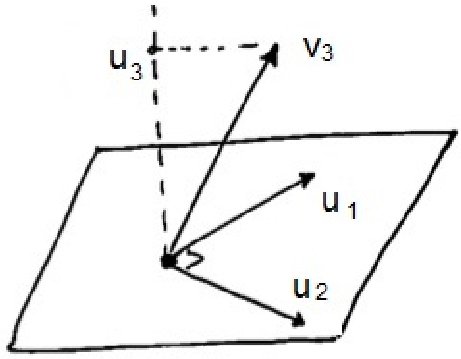
1. V každom $H$ priestore existuje úplná ortogonálna sústava.
2. Každá ortogonálna sústava je doplniteľná na úplnú.
3. V separabilnom priestore je ortogonálna sústava konečná, alebo spočítateľná.
4. V neseparabilnom priestore je ortogonálna sústava už nespočítateľná.

**Definícia 4.1.26.**

Ľubovoľný systém prvkov $B$ v priestore $H$ nazveme báza, akk je tento systém ortonormálny a úplný.




(a)




(b)

Obr. 4.5: Gramov-Schmidtov ortonormalizačný proces.

**Príklad 4.1.27.**

1. systém $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je báza v $l^2$
2. systém $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ : $f_n(x) = \mathrm{e}^{2\pi inx}$ je báza v $\mathcal{L}^2(0, 1)$

**Gramov-Schmidtov ortonormalizačný proces:**

Majme separabilný $H$ priestor. Definujme operátor projekcie $P_{\mathbf{u}} : H \to H$

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}\mathbf{u},$$

ktorý robí kolmý priemet vektora $\mathbf{v}$ na "priamku" generovanú vektorom $\mathbf{u}$. Majme LN neortogonálny systém $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\}$, potom vygenerujeme prvých $k$ ortonormálnych prvkov $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_k$ takto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2), & \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \qquad (4.1) \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3), & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \\
\mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_4) - P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_4) - P_{\mathbf{u}_3}(\mathbf{v}_4), & \mathbf{e}_4 &= \frac{\mathbf{u}_4}{\|\mathbf{u}_4\|} \\
&\vdots & &\vdots \\
\mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} P_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{v}_k), & \mathbf{e}_k &= \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

**Príklady úplných ortogonálnych sústav:**

Uvažujme systém $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots, n \in \mathbb{R}$. Ľubovoľný konečný podsystém je LN v priestore $\mathcal{L}^2(-1,1)$. Po ortonormalizácii dostaneme systém $L_n(t), n \in \mathbb{N}_0$ a keďže vieme, že každú spojitú funkciu vieme aproximovať polynómom s ľubovoľnou presnosťou, je tento systém hustý v $\mathcal{L}^2(-1,1)$ (keďže aj množina $C([-1,1])$ je taká). Takto sme dostali tzv. Legendreove polynómy. Podobne možno získať aj iné typy polynomických systémov, napríklad ak uvažujeme priestor $\mathcal{L}^2_w(a,b)$.

| Polynómy | Inerval | $w(t)$ |
|---|---|---|
| Čebyševove 1. druhu | $[-1,1]$ | $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ |
| Čebyševove 2. druhu | $[-1,1]$ | $\sqrt{1-x^2}$ |
| Gegenbauerove | $[-1,1]$ | $(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ |
| Hermiteove | $\mathbb{R}$ | $\mathrm{e}^{-t^2}$ |
| Jacobiho | $(-1,1)$ | $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ |
| zovšeobecnené Laguerrove | $[a,\infty)$ | $\mathrm{e}^{-t}(t-a)^k$ |
| Legendreove | $[-1,1]$ | 1 |

Tabuľka 4.1: Niektoré známe ortogonálne polynómy.

**Poznámka 4.1.28.**

Pozor existujú aj neseparabilné Hilbertove priestory (príklad presahuje naše vedomosti).

**Definícia 4.1.29.**

Majme ľubovoľné metrické priestory $(\mathbf{M}_1, \rho_1), (\mathbf{M}_2, \rho_2)$. Bijektívne zobrazenie $f : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ označíme ako izometrické zobrazenie, ak pre každé $x, y \in \mathbf{M}_1$ platí $\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$. Ak existuje izometrické zobrazenie priestoru $\mathbf{M}_1$ na $\mathbf{M}_2$, potom sa tieto priestory nazývajú izometrické.

Pri izometrickom zobrazení sa teda zachovávajú vzdialenosti. Izometria je aj jednou zo symetrií vo fyzikálnom zmysle.

**Príklad 4.1.30.**

Rotácia, zrkadlenie, či posunutie sú izometrické zobrazenia v euklidovských priestoroch. Zobrazenie $x \to |x|$ nie je izometria.

**Veta 4.1.31.**

Ľubovoľný separabilný, nekonečnorozmerný Hilbertov priestor je izometrický s priestorom $l^2$.